Puncture loops on a non-orientable surface

和久田 葵 (Aoi WAKUDA)

東京大学大学院数理科学研究科 博士 1 年

概要

オイラー標数が負であるような連結な曲面 N において、2 つの閉測地線とそれらの横断的な交点から smoothing によって得られるループの自由ホモトピー類が puncture を周回することがある。Chas と Kabiraj は、[1] の Lemma 2.7 において、曲面 N が向き付け可能のときには、この現象は起こらないことを示した。本研究では、曲面 N が向き付け不可能であって、smoothing 前の 2 つの測地線が one-sided であるときにのみ、この現象が起こることを示した。特に、片方の測地線を m 回周回させて得られるループの自由ホモトピー類が puncture を周回するような m は高々 2 個であることを示した。さらに、そのような m が 2 個存在する場合は、それらが連続する奇数であることも示した。

1 ねじれ双曲変換

定義 1.1.（**ねじれ双曲変換**）

$f \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$ が**ねじれ双曲変換** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: 双曲元 $s.t.$ $f = \rho_{A_g} \circ g$

(ただし、A_g は g の軸であり、 ρ_{A_g} は A_g による鏡映である。)

定義 1.2.（**ねじれ双曲変換の軸**）

$f = \rho_{A_g} \circ g \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$: ねじれ双曲変換 のとき、**軸** A_f を A_g で定義する。また、**translation length** t_f は t_g に等しい。

命題 1.3.（**translation length の関係**）

$f = \rho_{A_g} \circ g \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$: ねじれ双曲変換 のとき、translation length t_f は t_g に等しい。

次に双曲変換に関する重要な 2 つの補題を思い出す。

補題 1.4.（**双曲変換を 2 つの 180 度回転の合成で表現する**）

等長変換 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ について、以下は同値：

1. g が双曲変換
2. $\exists v_1, v_2 \in \partial\mathbb{H}^2$ s.t. $g = \varepsilon_{v_2}\varepsilon_{v_1}$（ただし、$\varepsilon_{v_i}$ は点 v_i における 180 度の回転）

また、このとき、

$$g \text{ の軸 } A_g \text{ は、} v_1, v_2 \text{ を通り、} v_2 \text{ は } v_1 \text{ より } A_g \text{ 上で正方向にあり、} d(v_1, u_2) = \frac{1}{2}t_g \text{ をみたす。}$$

補題 1.5.（**双曲変換を 2 つの鏡映の合成で表現する**）

等長変換 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ について、以下は同値：

1. g が双曲変換
2. $\exists u_1, u_2 \subset \mathbb{H}$: 交わっていない異なる双曲直線 s.t. $g = \rho_{u_2}\rho_{u_1}$（ただし、ρ_{u_i} は u_i による鏡映変換）

また、このとき、

$$g \text{ の軸 } A_g \text{ は、} u_1, u_2 \text{ と直交し、} u_1 \text{ より } u_2 \text{ が } A_g \text{ 上正方向にあり、} d(u_1, u_2) = \frac{1}{2}t_g \text{ をみたす。}$$

Beardon は上の補題 1.4 を用いることで、以下の定理 A を示した。

email:aoichan19991226@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

定理 1.6.A. [2, Theorem 7.38.6]

a, b を $P \in \mathbb{H}^2$ において軸が交わる双曲変換とし、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は双曲元となる。特に、移動長さについての関係式として以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{t_{a\circ b}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta.$$

また、上の補題 1.4 に加えて、補題 1.5 も用いることで、定理 1.6.A における通常の双曲変換をねじれ双曲変換に変えた定理 1.6.B〜定理 1.6.D を示すことができる。

定理 1.6.B.

a を双曲変換、b をねじれ双曲変換とし、P を a の軸と b の軸の交点とする。また、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は以下のようになる。

(i) $\cos\theta > -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ねじれ双曲変換である。特に、以下の等式が成り立つ

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

(ii) $\cos\theta = -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ある軸による鏡映である（特に、ねじれ双曲変換でない)。

(iii) $\cos\theta < -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ねじれ双曲変換である。特に、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = -\cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) - \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

定理 1.6.C.

a をねじれ双曲変換、b を双曲変換とし、P を a の軸と b の軸の交点とする。また、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は以下のようになる。

(i) $\cos\theta > -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ はねじれ双曲変換であり、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

(ii) $\cos\theta = -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、実軸を軸にもつ鏡映変換である（特に、ねじれ双曲変換ではない)。

(iii) $\cos\theta < -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ はねじれ双曲変換であり、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = -\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) - \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

定理 1.6.D. a, b を $P \in \mathbb{H}^2$ において軸が交わるねじれ双曲変換とし、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ は

$$\begin{cases} \text{楕円元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| < 1 \\ \text{放物元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| = 1 \\ \text{双曲元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| > 1 \end{cases}$$

をみたす。特に、合成 $a \circ b$ が双曲元となるときには、移動長さの関係式として以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{t_{a\circ b}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right|.$$

2. 向き付け不能曲面上のループと双曲変換

$N(= N_{n,p})$ を向き付け不能曲面とする（ただし、n は種数, p は 1 点穴の数)。特に、N に双曲計量が入るものを扱いたいので、条件

$$\chi(N) = 2 - n - p < 0 \text{ つまり } (n, p) \neq (1, 0), (1, 1), (2, 0)$$

をみたす N についてのみ考える。また、$\hat{\pi}$ を N 上の自由ホモトピー類全体の集合とし、$\mathcal{T}$ を N のタイヒミュラー空間とする。加えて、$x \in \hat{\pi}$ に対し、 計量 $X \in \mathcal{T}$ に関する測地線を $x(X)$ と書き、その長さを $l_x(X)$ とかく。また、交点 $P \in x(X) \cap y(X)$ における forward angle ϕ_P をそれぞれの順方向どうしのなす角と定義する。

定義 2.1.（**puncture loop**）
$\alpha \in \hat{\pi}$ が N のある 1 点穴を周回するとき、**puncture loop** であるという。

補題 2.2. $X \in \mathcal{T}$ とし、$x \in \hat{\pi}$ を one-sided とする。$x(X)$ に対応する $f \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$ はねじれ双曲変換であり、$t_f = l_x(X)$ を満たす。

前章の定理 1.6.A〜定理 1.6.D により、以下の定理 2.3.A〜定理 2.3.D が成り立つ。
定理 2.3.A.([1] Lemma 2.7.)
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ を two-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ 、ϕ_P を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P.$$

定理 2.3.B.
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha \in \hat{\pi}$: two-sided, $\beta \in \hat{\pi}$: one-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$、$\phi_P$ を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\sinh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|.$$

(ただし、上の式の $l_\alpha, l_\beta, l_{|\alpha_P\beta_P|}$ は $X \in \mathcal{T}$ によるが、任意の $Y \in \mathcal{T}$ で成り立つ。)

定理 2.3.C.
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha \in \hat{\pi}$: one-sided, $\beta \in \hat{\pi}$: two-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$、$\phi_P$ を P における forward angle とすると、以下が成り立つ。

$$\sinh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|$$

(ただし、上の式の $l_\alpha, l_\beta, l_{|\alpha_P\beta_P|}$ は $X \in \mathcal{T}$ によるが、任意の $Y \in \mathcal{T}$ で成り立つ。)
定理 2.3.D. $X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$: one-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ 、ϕ_P を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|.$$

特に、右辺の値が 1 となるとき、$|\alpha_P\beta_P|$ は puncture loop となる。

補題 2.5. $X \in \mathcal{T}$, $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ とする。このとき、$|\alpha_P\beta_P|$ が puncture loop ならば、 α, β はともに one-sided となる。

定理 2.6. $X \in \mathcal{T}$, $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ とし、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする。このとき、$|\alpha_P^m\beta_P|$ が puncture loop となるような m は奇数であり、また、そのような m は高々 2 個である。特にそのような m が 2 個ある場合、それらは連続する奇数である。

証明. 補題 2.5 から m は奇数であり、$|\alpha_P^m\beta_P|$ が puncture loop となるような m の個数は

$$\left|\sinh(t)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh(t)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right| = 1$$

をみたす $t \in \mathbb{R}$ の個数以下であるため、高々 2 個であることがしたがう。特に、左辺の式を t の関数とみなすと、グラフの概形からそのような m が 2 個ある場合、それらは連続する奇数であることもしたがう。

参考文献

[1] Moira Chas and Arpan Kabiraj, The Lie bracket of undirected closed curves on a surface, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 375, No. 4, pp. 2365–2386, (2021).

[2] Alan F Beardon. The geometry of discrete groups, volume 91. Springer Science + Business Media, (2012).